



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Wykład 6

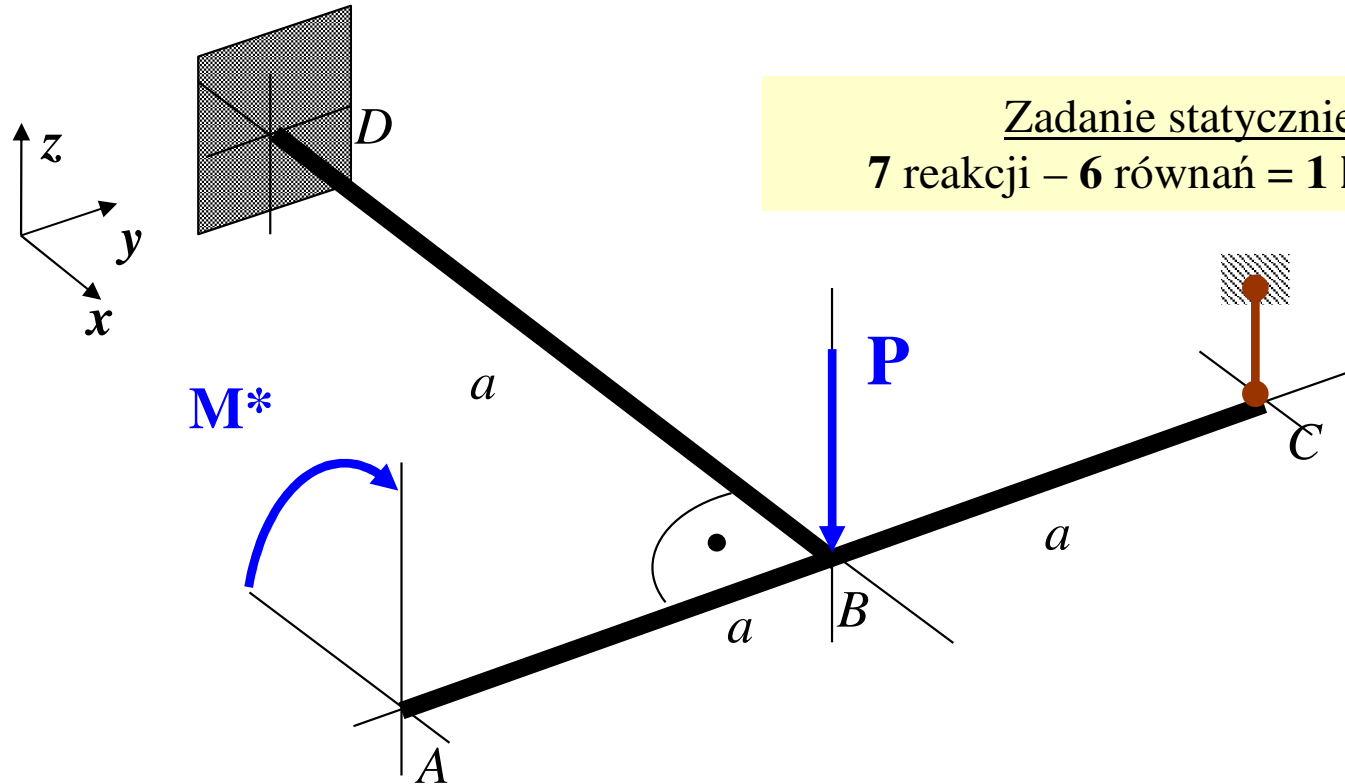
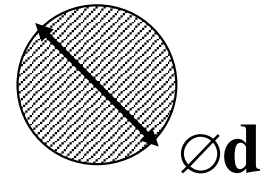
Konstrukcje prętowe statycznie niewyznaczalne

Metoda sił Maxwella-Mohra

Przykłady

Zad.1. Rozwiązać statycznie niewyznaczalną ramę płaską obciążoną niepłasko

Dane: P , $M^*=Pa$, a , d , E , ν



Zadanie statycznie niewyznaczalne:
7 reakcji – 6 równań = 1 kr. stat. niewyznaczalne

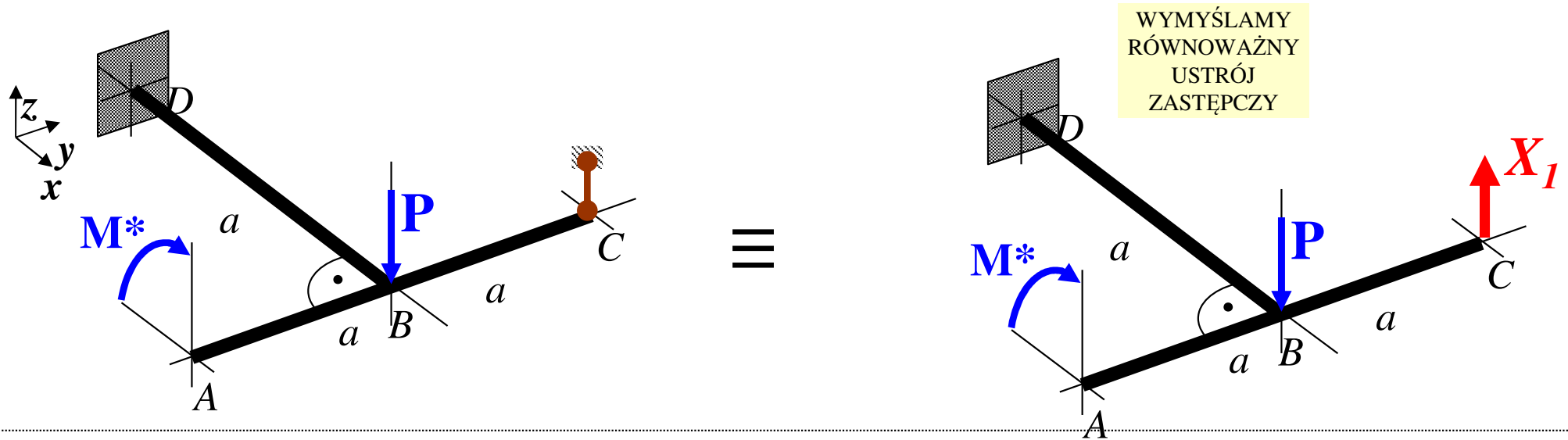
Relacja sztywności giętnej i skrętnej dla przekroju kołowego:

Charakterystyki przekroju:

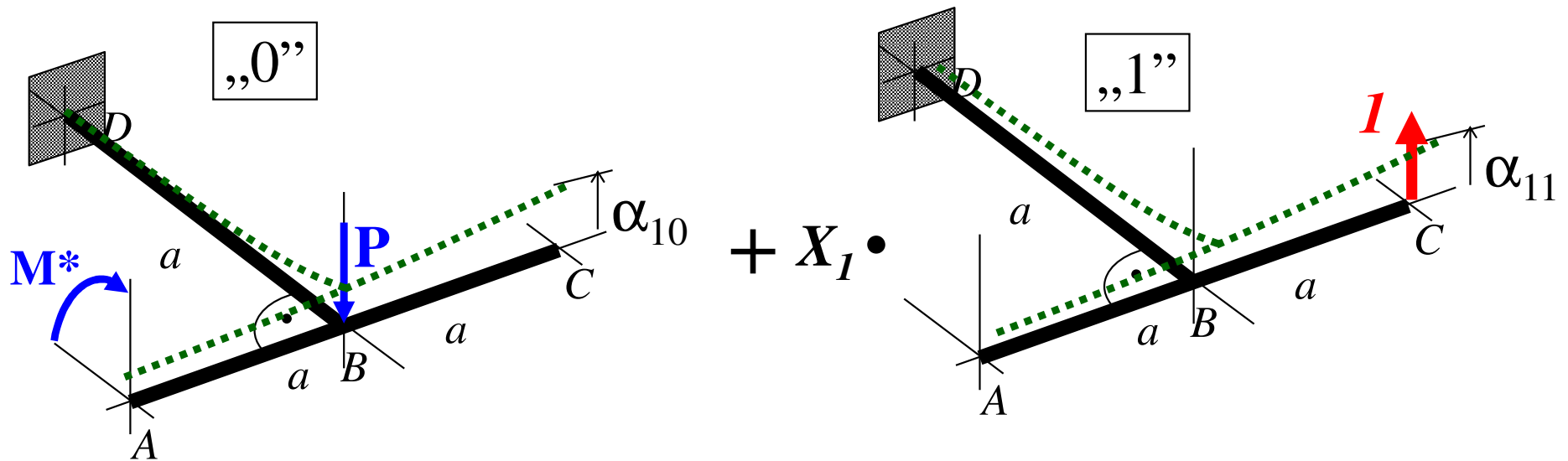
$$J_y = \frac{\pi d^4}{64} \quad J_s = J_o = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$GJ_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} 2J_y = \frac{EJ_y}{(1+\nu)} = \frac{10}{13} EJ_y$$

Statycznie niewyznaczalna rama płaska obciążona niepłasko



SUPERPOZYCJA STANÓW:

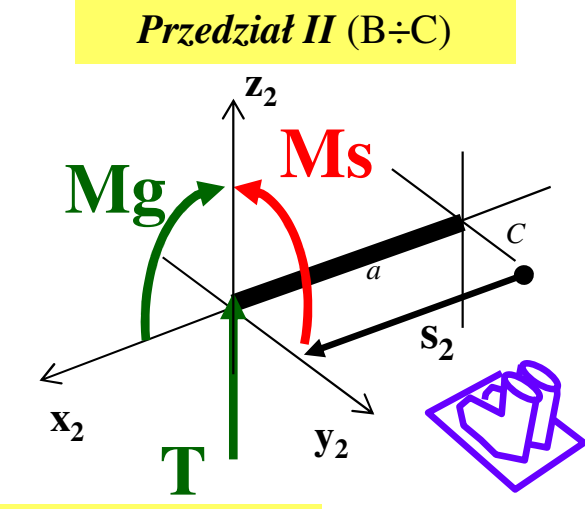
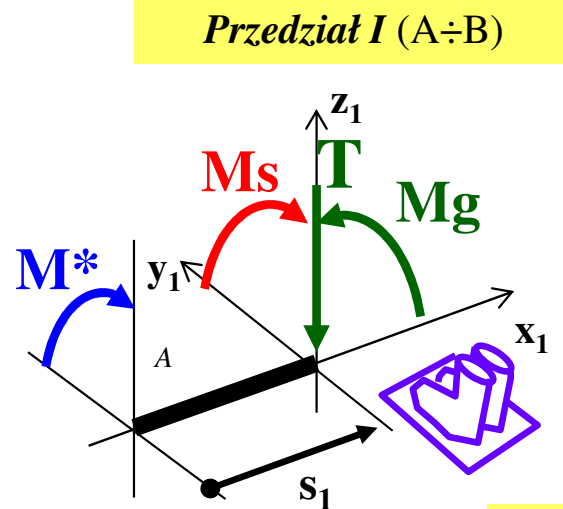
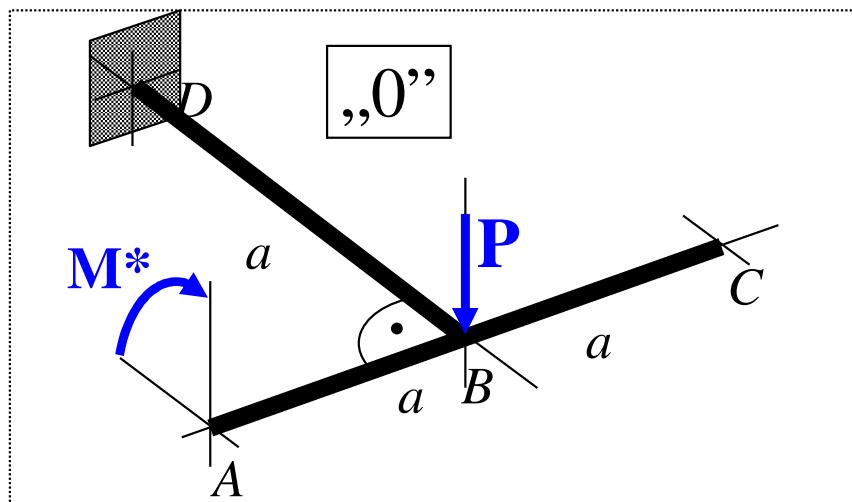


Warunek zerowych przemieszczeń dla uwolnionego stopnia swobody:

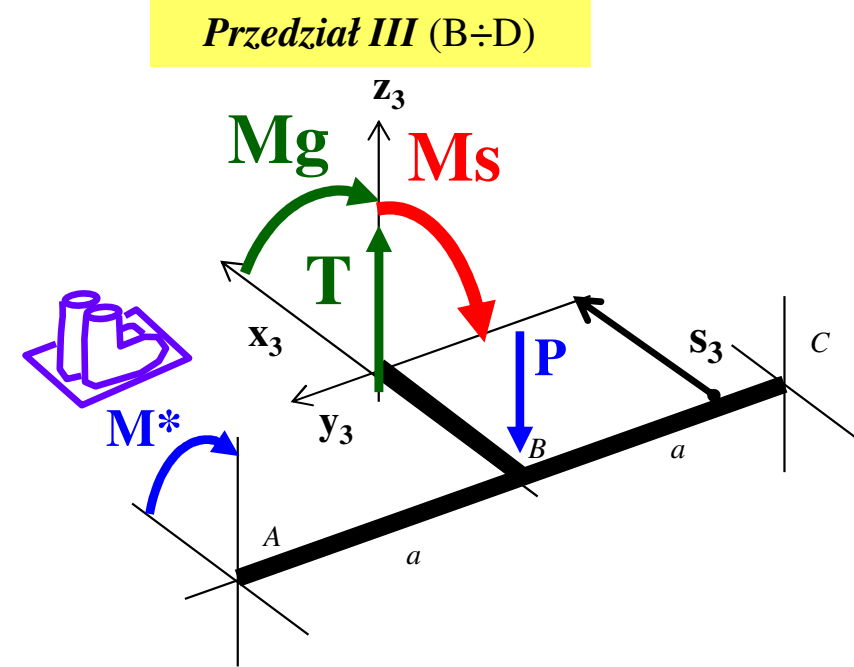
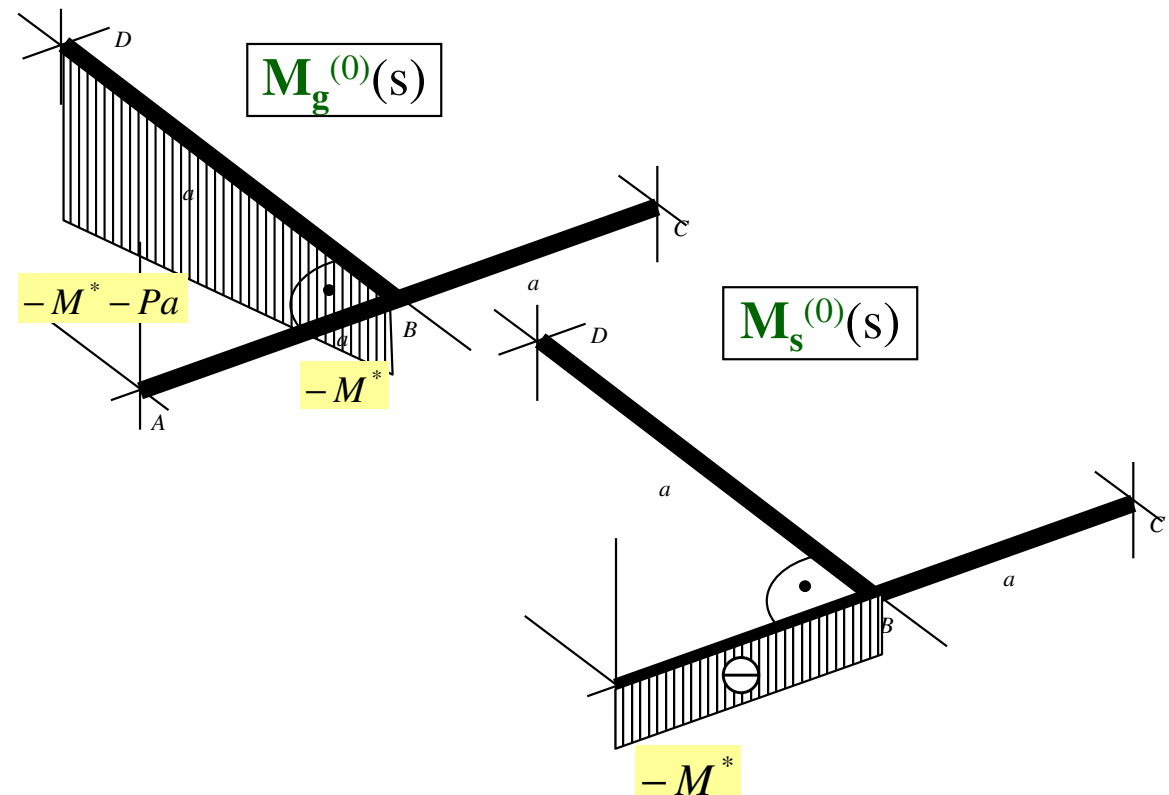
$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0$$

Równanie kanoniczne metody sił M-M

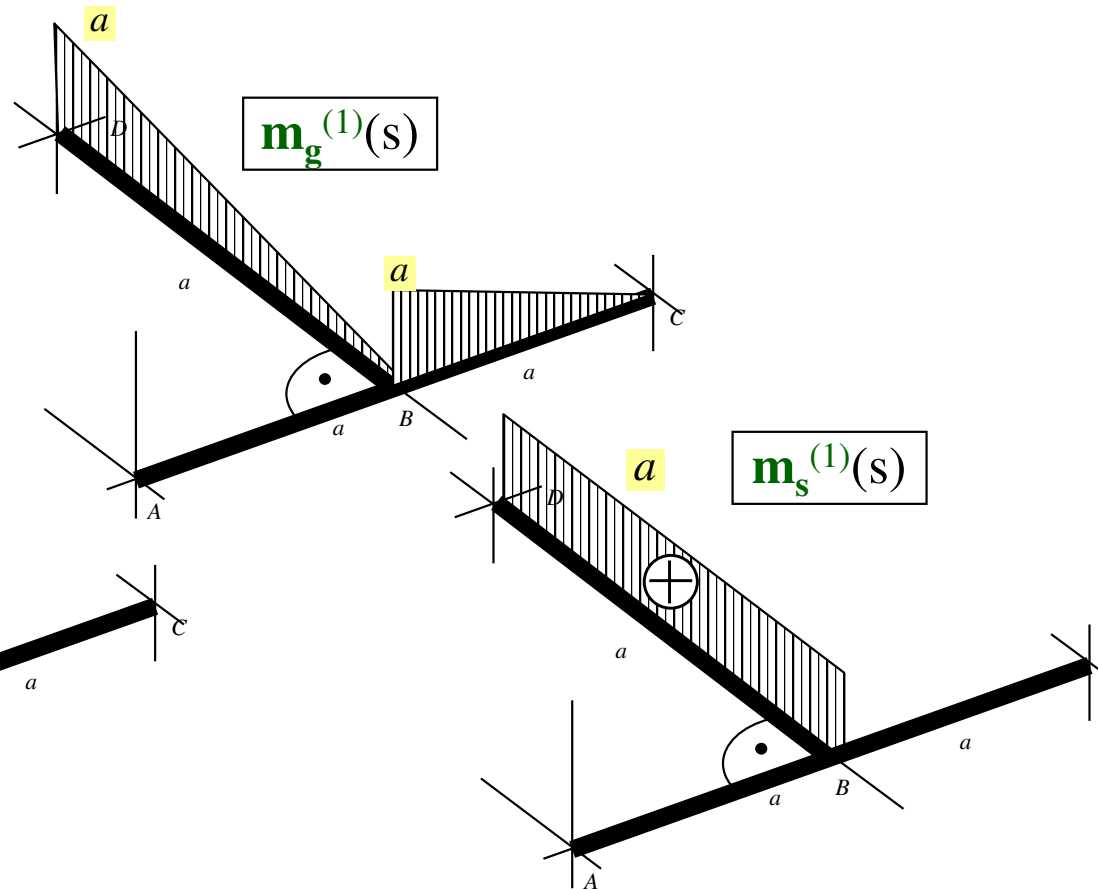
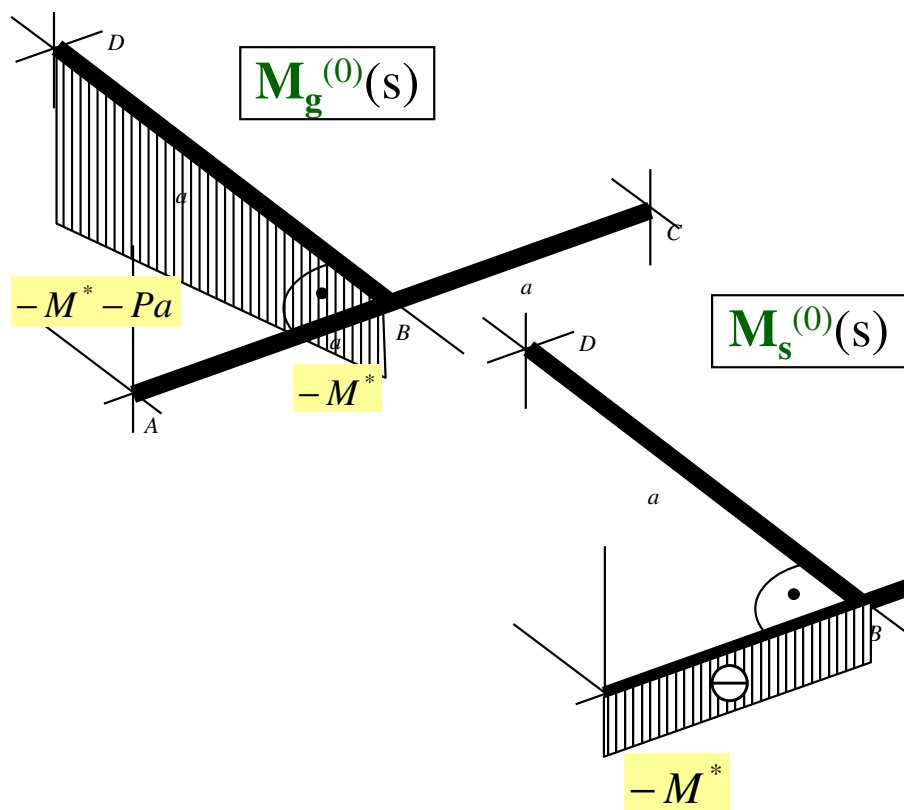
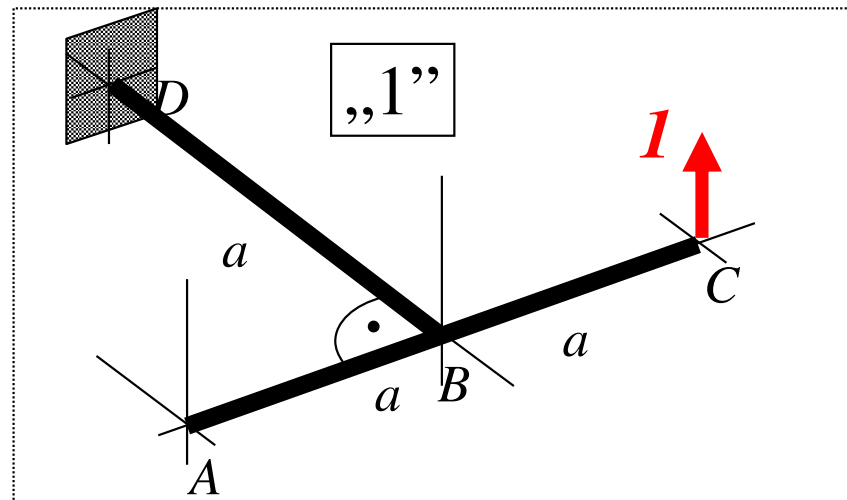
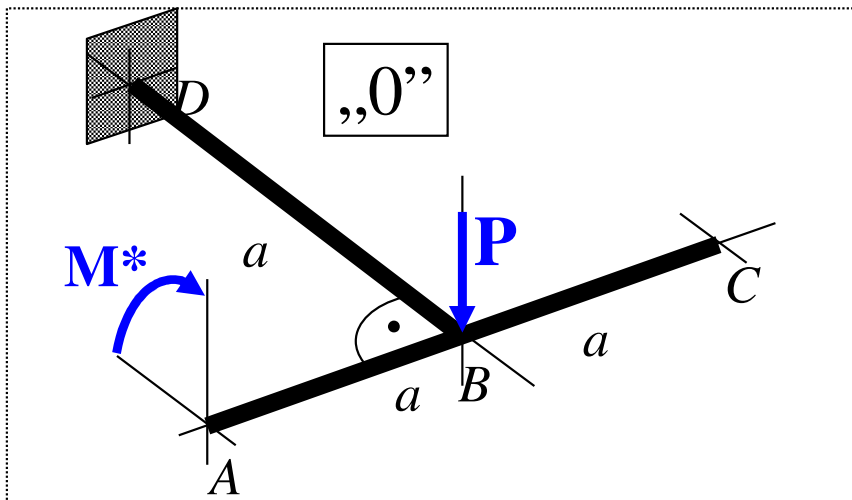
Statically indeterminate plane frame loaded non-uniformly – state „0”



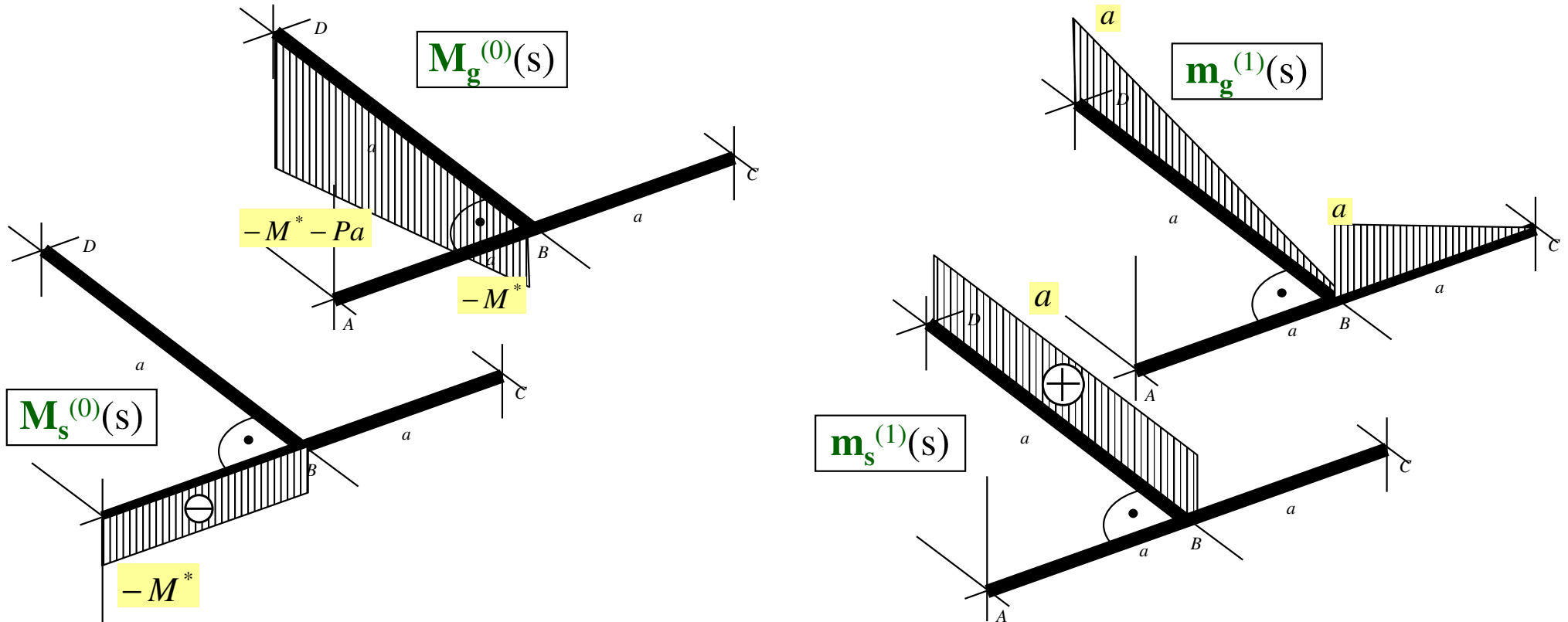
Rozkład momentów gnących i skręcających w stanie „0”:



Statycznie niewyznaczalna rama płaska obciążona niepłasko – stan „0” i „1”



Stycznie niewyznaczalna rama płaska obciążona niepłasko – współczynniki r-nia M-M



$$\alpha_{11} \equiv \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot m_g^{(1)}}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{m_s^{(1)} \cdot m_s^{(1)}}{GJ_s} \cdot ds = \frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{2}{3} a \cdot 2 + \frac{1}{GJ_s} a^2 \cdot a = \frac{2a^3}{3EJ_y} + \frac{13}{10} \frac{a^3}{EJ_y} = \frac{59}{30} \frac{a^3}{EJ_y}$$

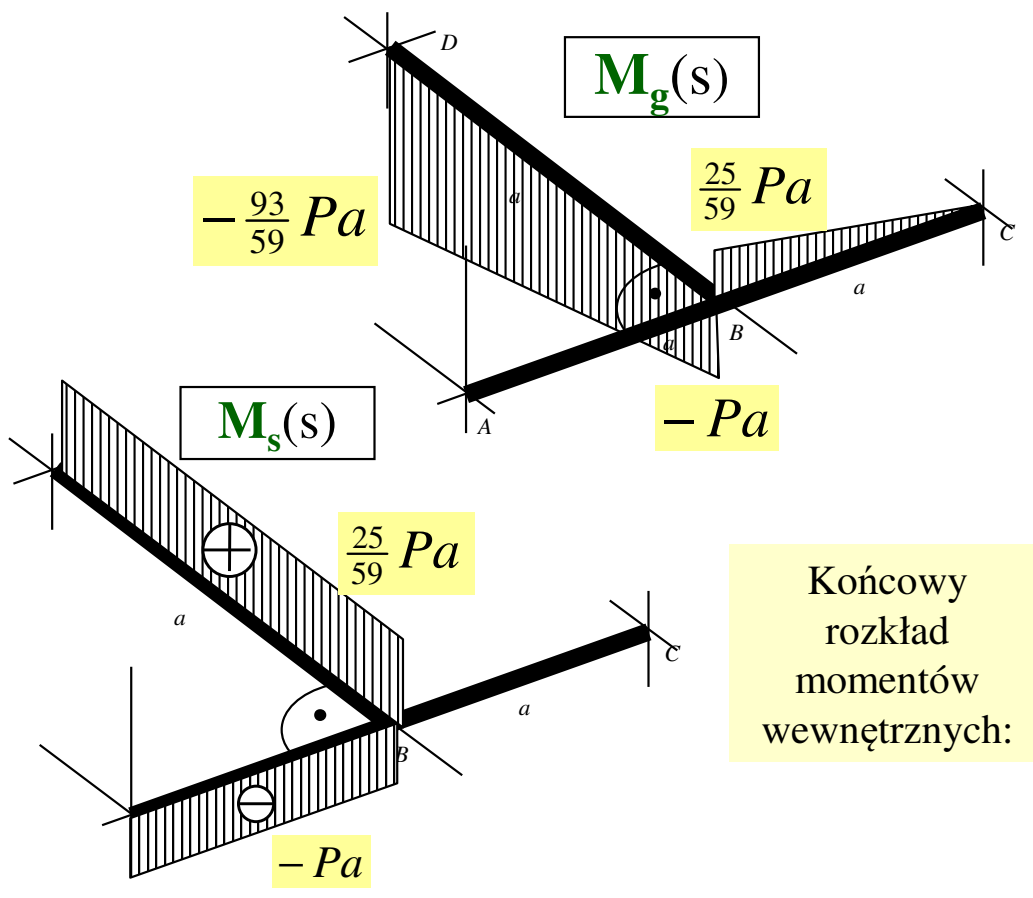
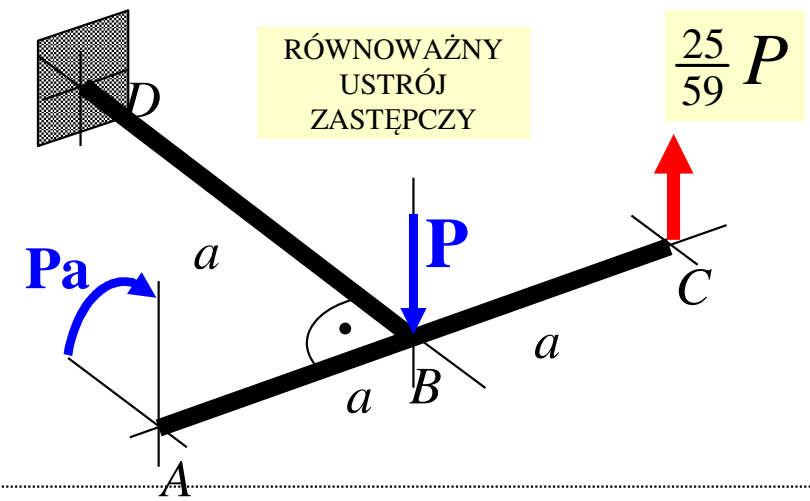
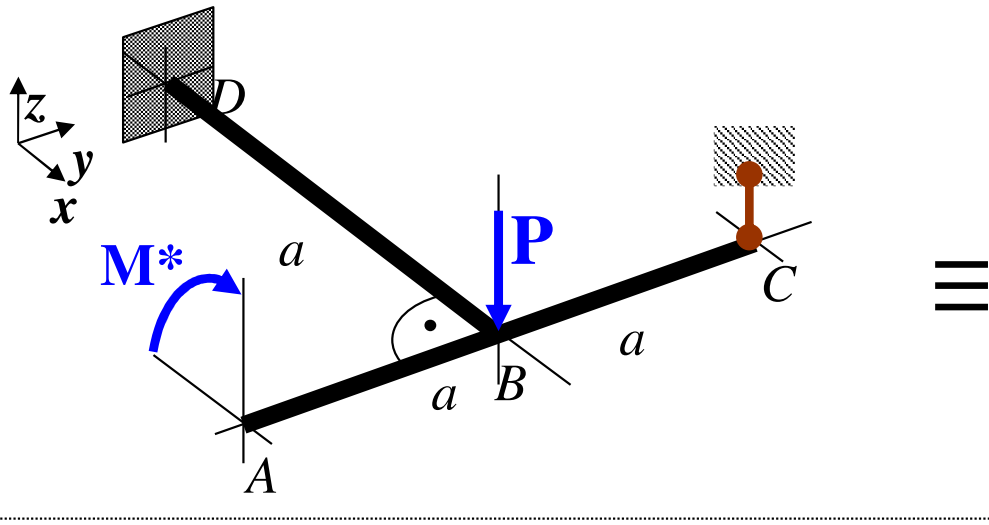
$$\alpha_{10} \equiv \int_l \frac{m_g^{(1)} \cdot M_g^{(0)}}{EJ_y} \cdot ds + \int_l \frac{m_s^{(1)} \cdot M_s^{(0)}}{GJ_s} \cdot ds = -\frac{1}{EJ_y} \frac{1}{2} a^2 \cdot \left(M^* + \frac{2}{3} Pa \right) + \frac{1}{GJ_s} \cdot 0 = -\frac{\left(M^* + \frac{2}{3} Pa \right) a^2}{2EJ_y} = -\frac{5}{6} \frac{Pa^3}{EJ_y}$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0$$

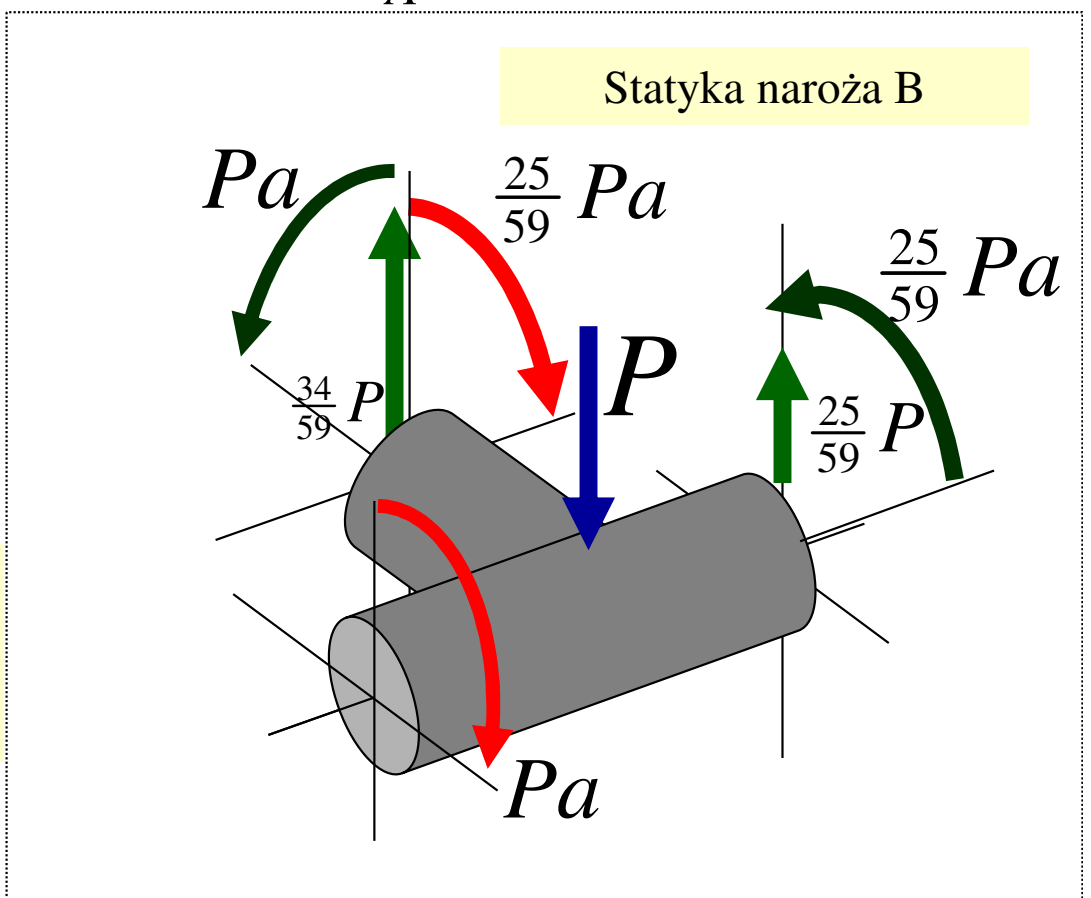
$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{-5Pa^3}{6EJ_y} \cdot \frac{30EJ_y}{59a^3}$$

$$X_1 = \frac{25}{59} P$$

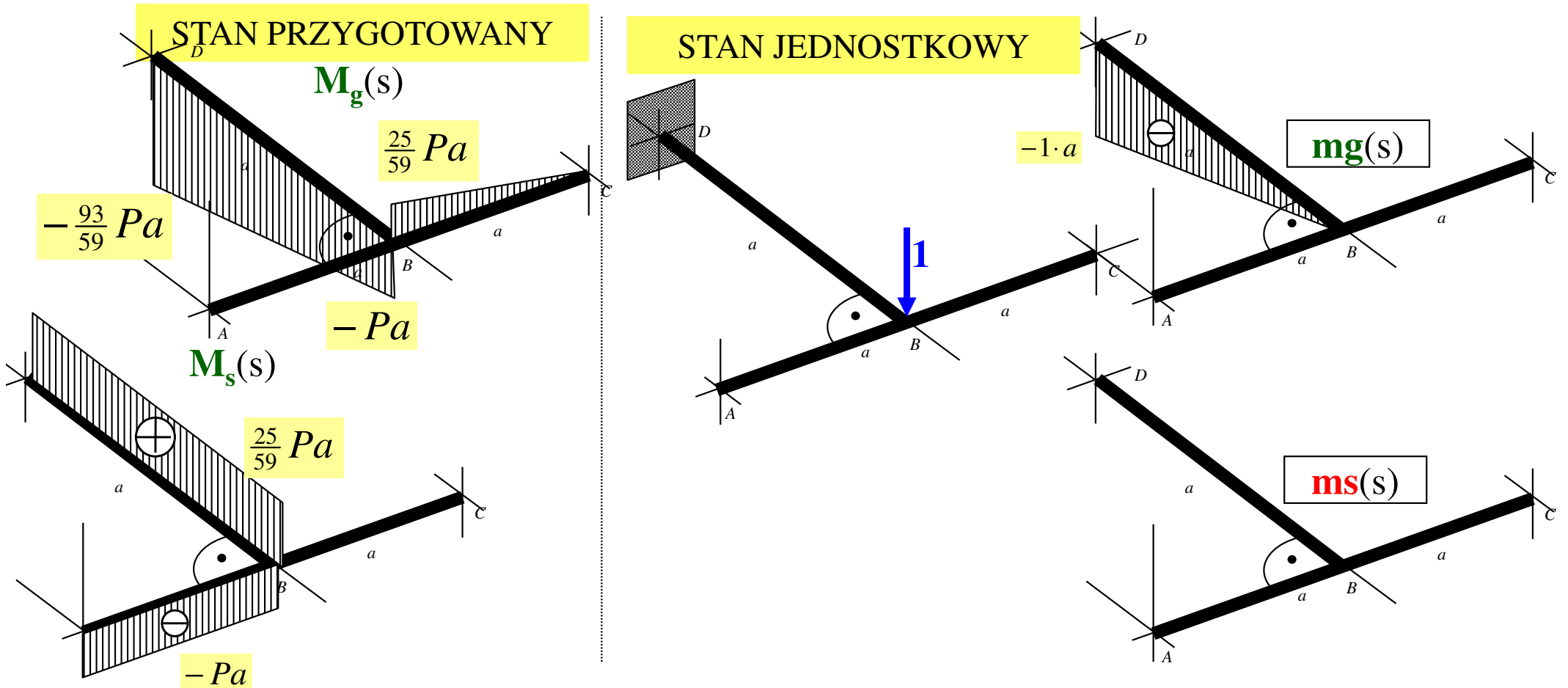
Statically indeterminate plane frame loaded non-uniformly – final results



Końcowy rozkład momentów wewnętrznych:



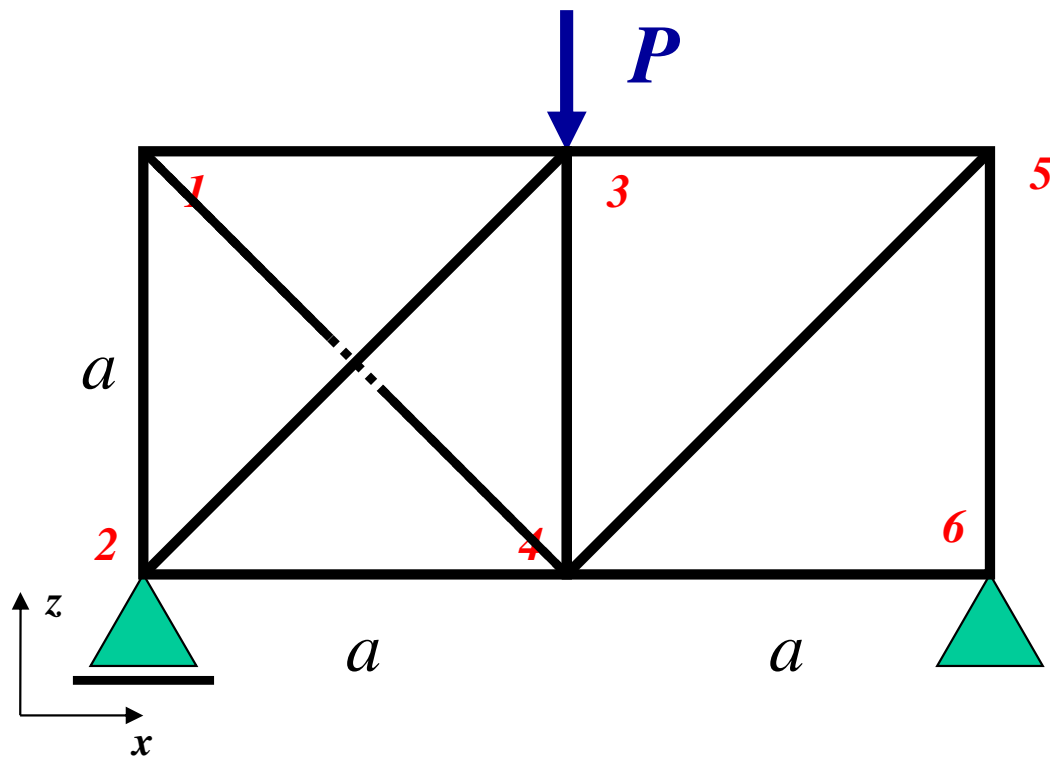
Wyznaczyć przemieszczenia pionowe punktu B $w_B = ?$



$$w_B \cong \sum_1^3 \left(\int_l \frac{M_g \cdot m_g}{EJ_y} ds + \int_l \frac{M_s \cdot m_s}{GJ_s} ds \right) \stackrel{\text{t.W.}}{=} \frac{1}{GJ_s} \left[\underbrace{(-Pa)a \cdot 0} + \underbrace{\left(\frac{25}{59}Pa^2\right) \cdot 0} + 0 \right] +$$

$$+ \frac{1}{EJ_y} \left[\underbrace{-Pa^2 \cdot \frac{1}{2}(-a)} + \frac{1}{2} \left(-\frac{(93-59)}{59}Pa \right) a \cdot \frac{2}{3}(-a) + \frac{1}{2} \left(\frac{25}{59}Pa \right) a \cdot 0 \right] = \frac{245Pa^3}{354EJ_y}$$

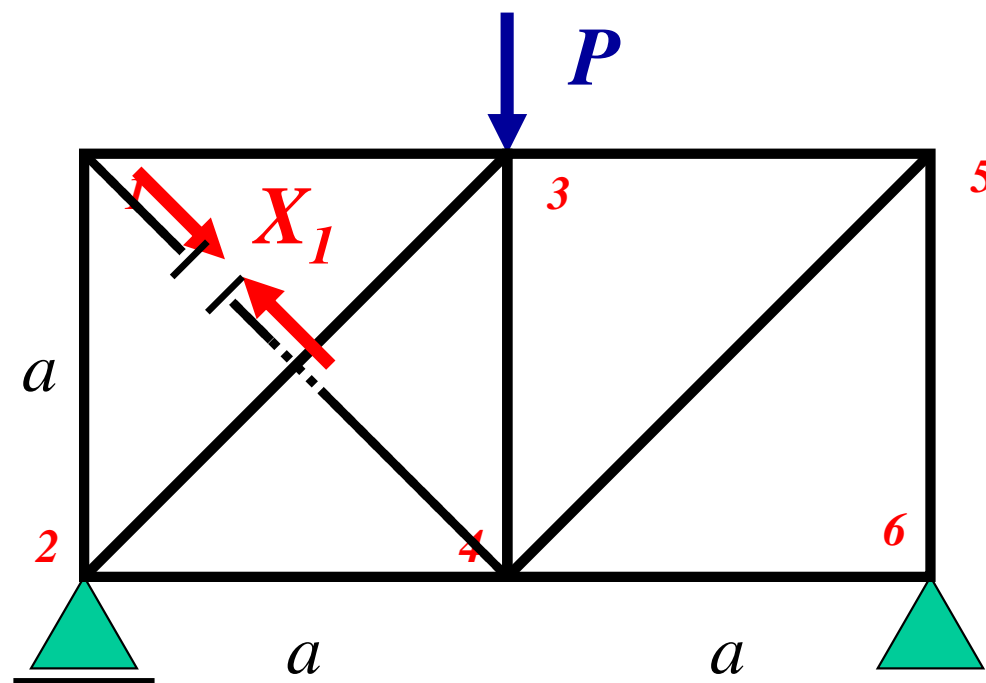
Zad.2. Rozwiązać płaską kratownicę statycznie niewyznaczalną



Dane: P , a , $EA = const$

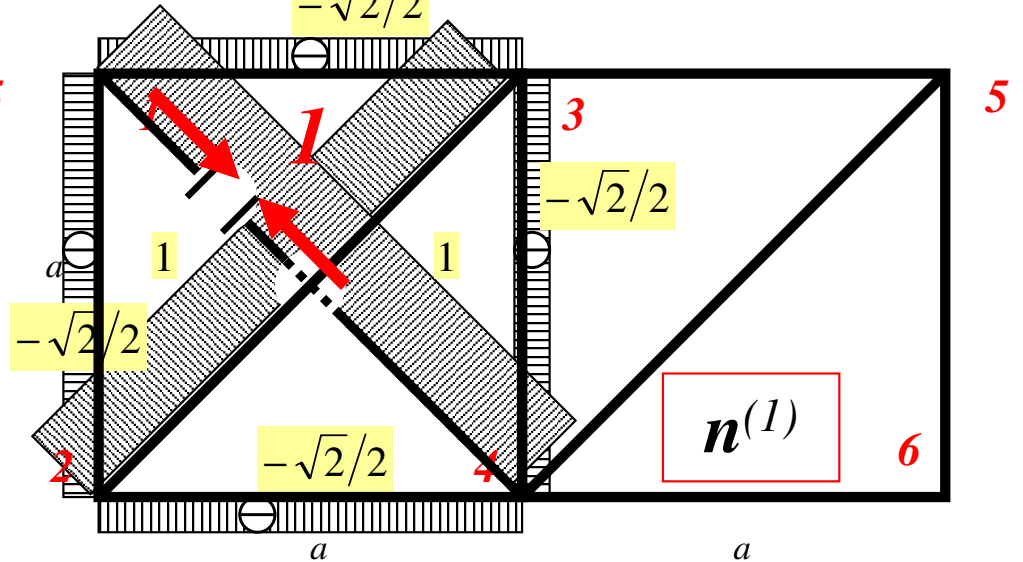
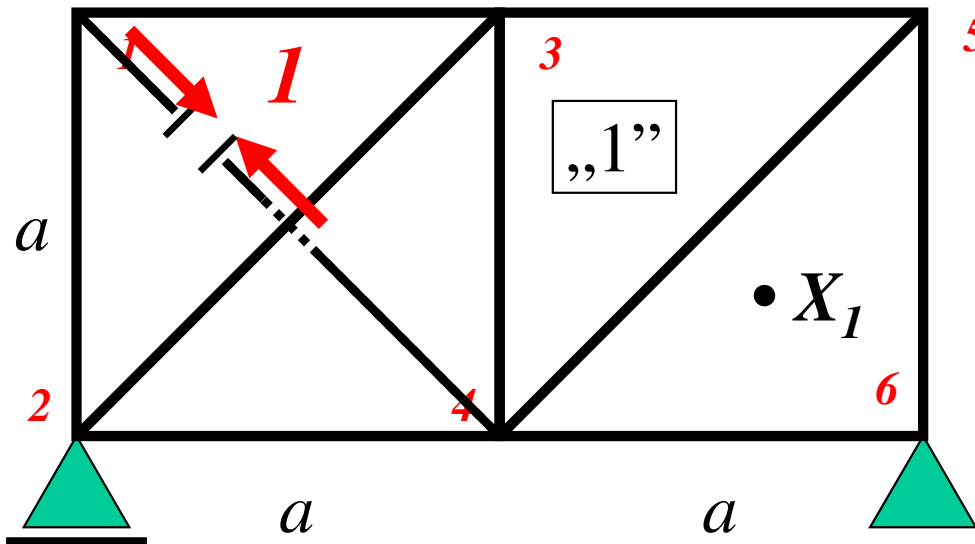
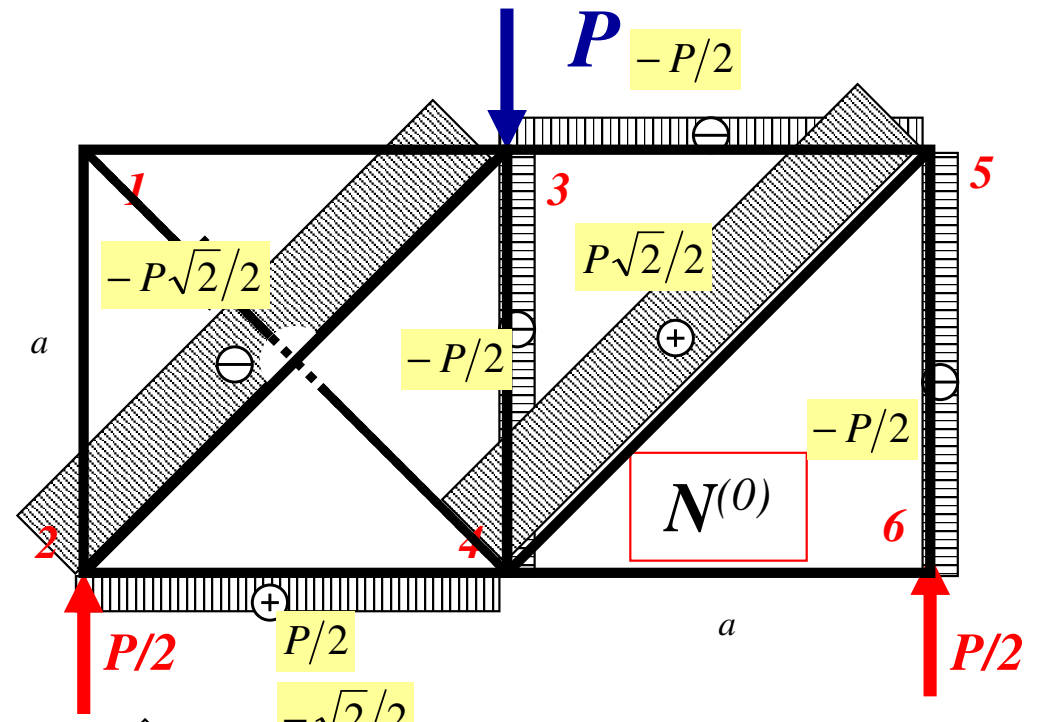
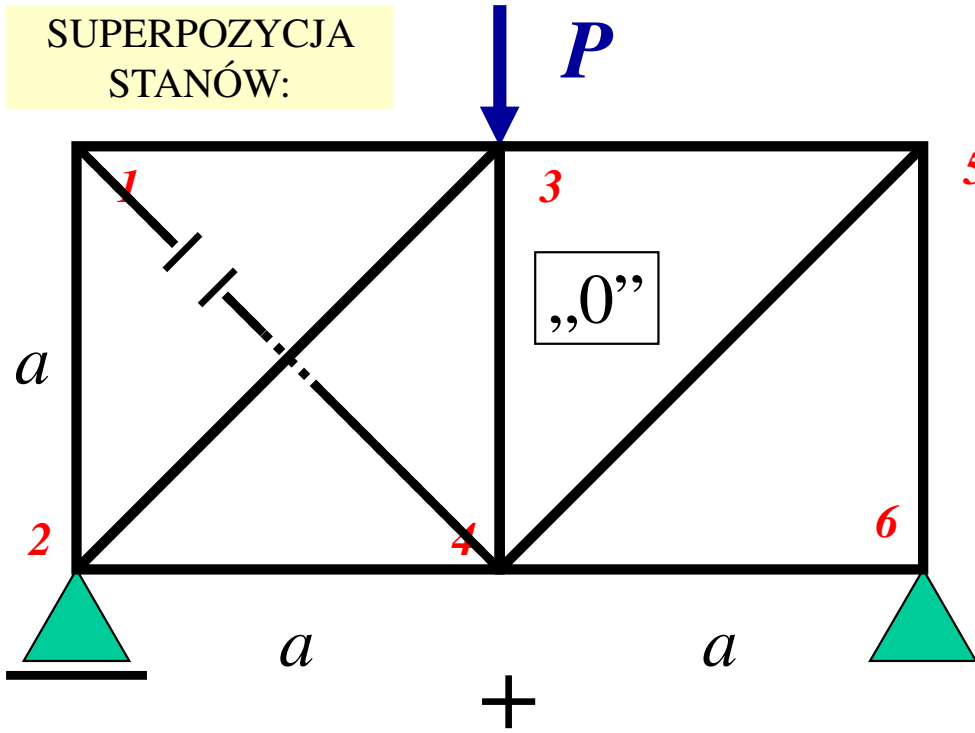
Zadanie 1 krotnie statycznie niewyznaczalne wewnętrznie

WYMYŚLAMY RÓWNOWAŻNY USTRÓJ ZASTĘPCZY

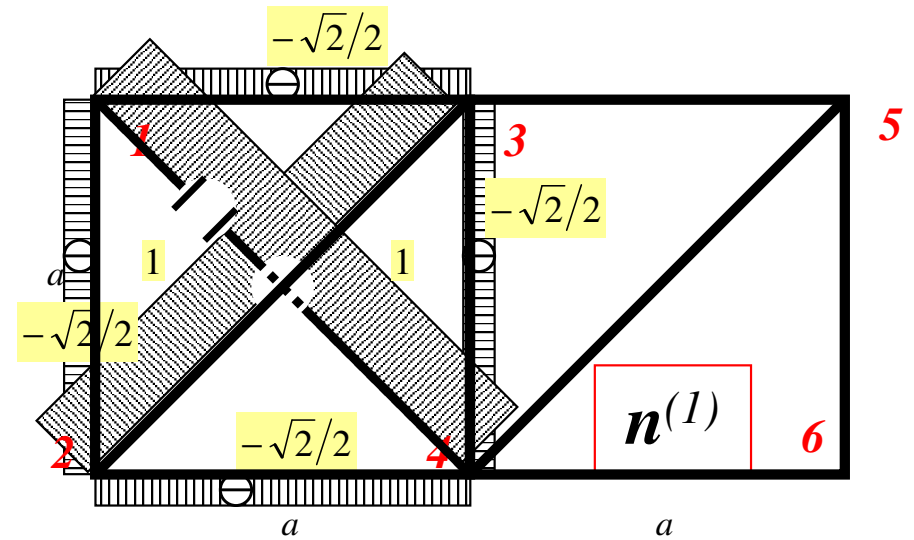
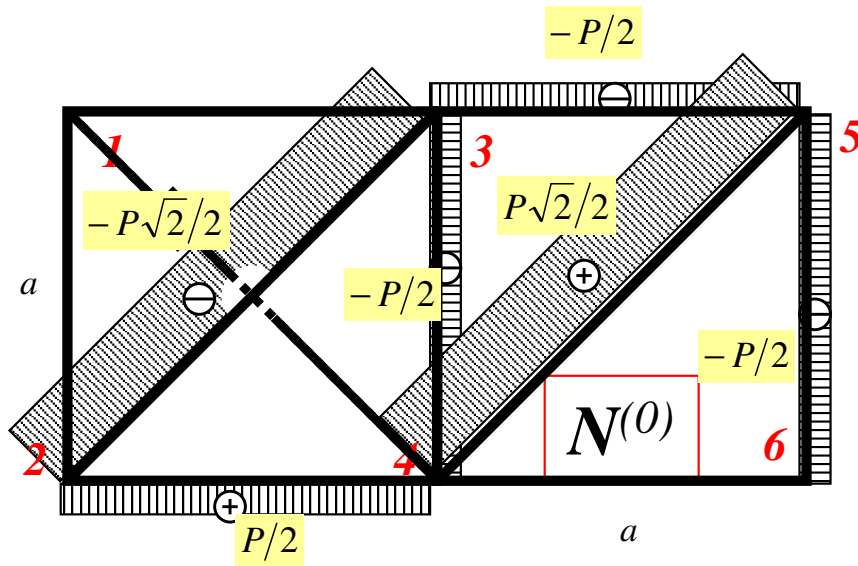


Rozwiązać płaską kratownicę statycznie niewyznaczalną

SUPERPOZYCJA
STANÓW:



Rozwiązać płaską kratownicę statycznie niewyznaczalną



$$\alpha_{10} \cong \sum_1^{10} \frac{N_i^{(0)} n_i^{(1)} l_i}{EA_i} = \frac{1}{EA} \left[\frac{-P\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot a\sqrt{2} + \frac{-P-\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2} + \frac{P-\sqrt{2}}{2} \frac{a}{2} \right] = -\frac{Pa}{EA}$$

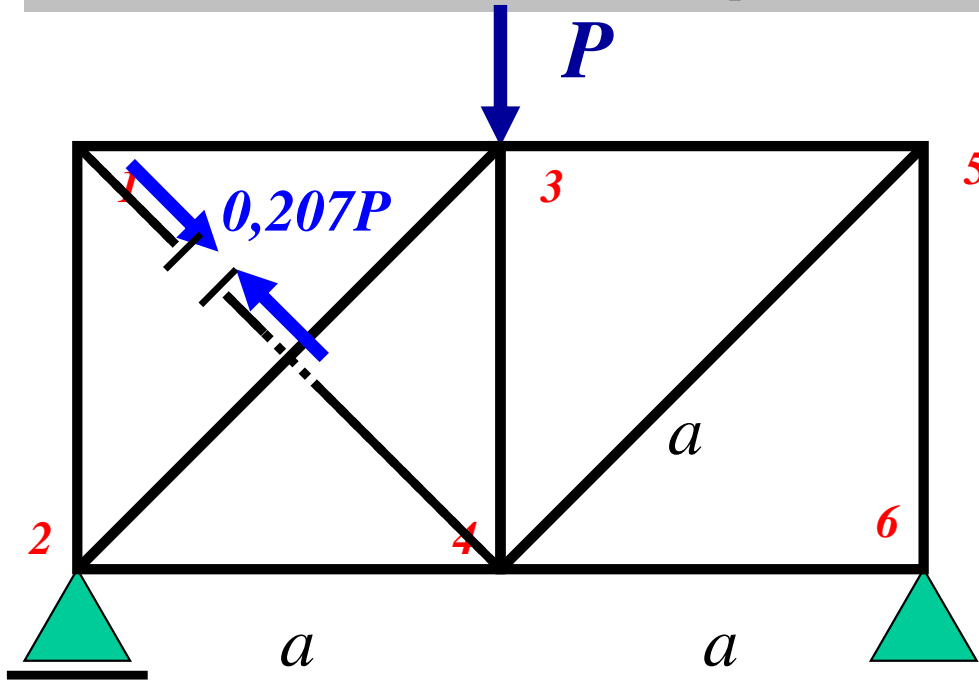
$$\alpha_{11} \cong \sum_1^{10} \frac{n_i^{(1)} n_i^{(1)} l_i}{EA_i} = \frac{1}{EA} \left[1 \cdot 1 \cdot a\sqrt{2} \cdot 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a \cdot 4 \right] = \frac{2a}{EA} (1 + \sqrt{2})$$

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} \cdot X_1 = 0 \Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{-Pa}{EA} \cdot \frac{EA}{2a(1+\sqrt{2})}$$

$$X_1 = \frac{1}{2(1+\sqrt{2})} P$$

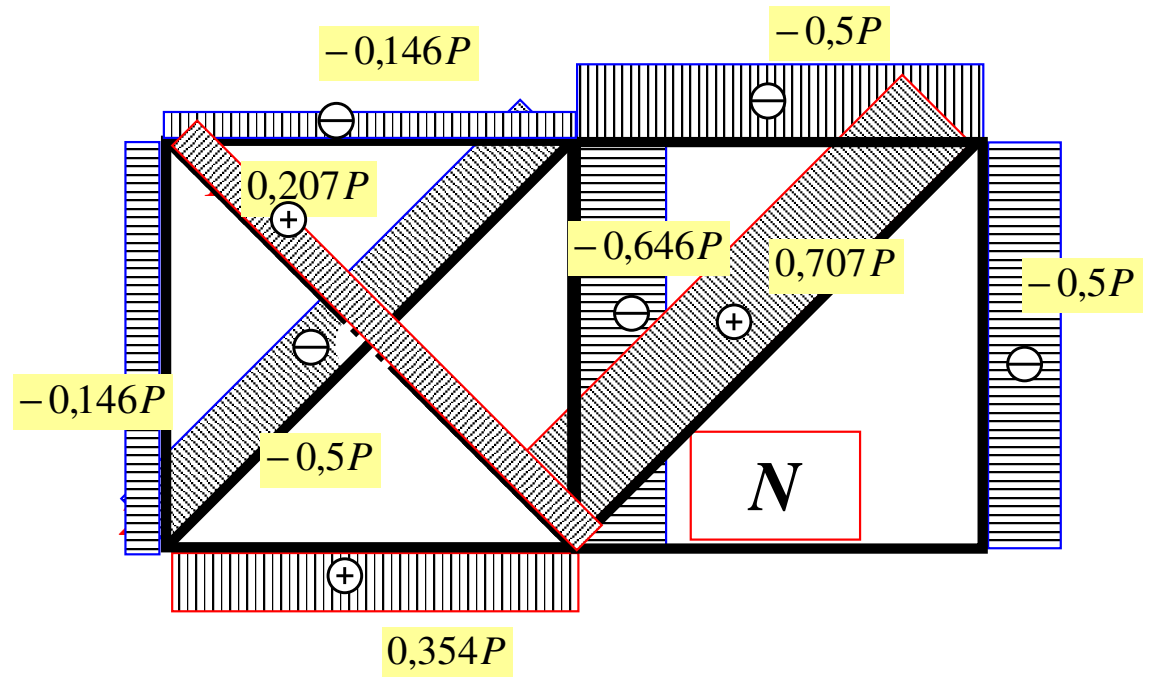
$$X_1 \cong 0,207P$$

Rozwiązać płaską kratownicę statycznie niewyznaczalną



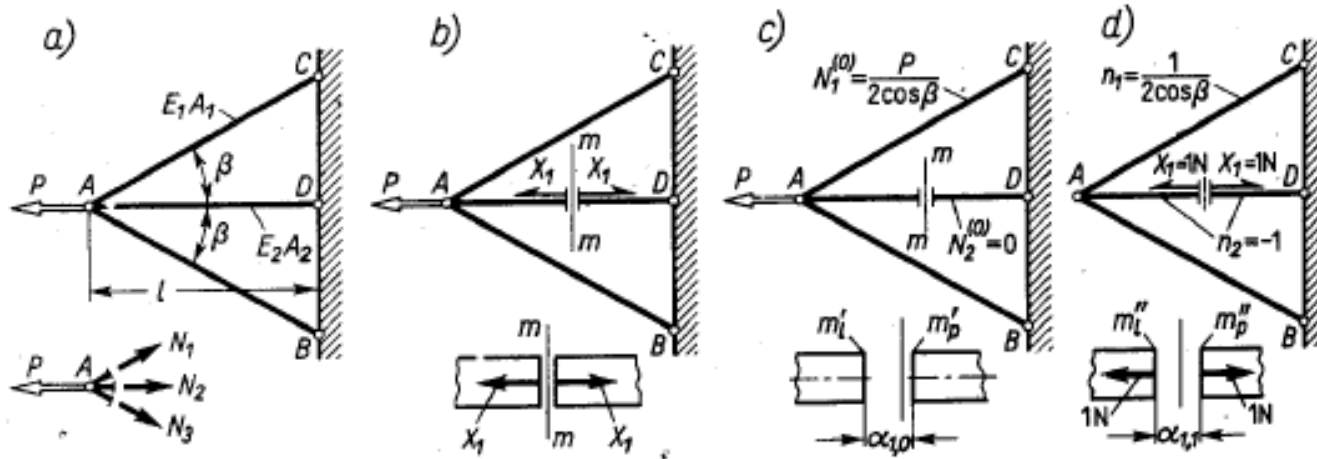
RÓWNOWAŻNY USTRÓJ
ZASTĘPCZY

Ostateczny rozkład sił
wewnętrznych



Porównanie metody sił z metodą przemieszczeń

Rozwiązanie kratownicy statycznie niewyznaczalnej metodą sił (M-M)



$$X_1 = - \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \beta (E_1 A_1 / E_2 A_2)}$$

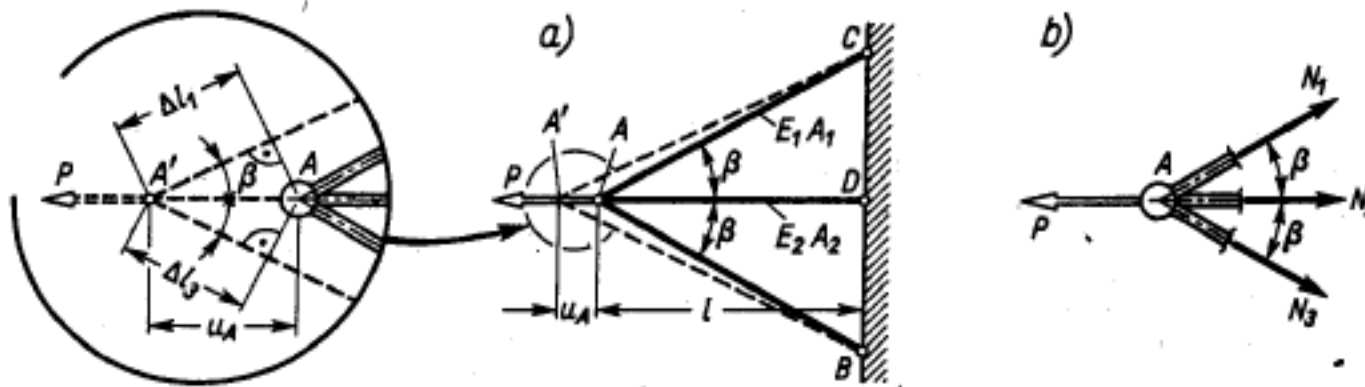
$$N_1 \sin \beta - N_3 \sin \beta = 0,$$

$$N_1 \cos \beta + N_2 + N_3 \cos \beta - P = 0,$$

$$N_1 = N_1^{(0)} + n_1 X_1 = P \frac{(E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^2 \beta}{1 + 2 (E_1 A_1 / E_2 A_2) \cos^3 \beta} = N_3,$$

$$N_2 = -X_1.$$

Rozwiązanie kratownicy statycznie niewyznaczalnej metodą przemieszczeń



$$\Delta l_1 = \Delta l_3 = u_A \cos \beta, \quad \Delta l_2 = u_A.$$

Tym wydłużeniom odpowiadają siły wzdłużne w prętach

$$N_1 = N_3 = E_1 A_1 \Delta l_1 / l_1 = E_1 A_1 u_A \cos^2 \beta / l, \quad N_2 = E_2 A_2 u_A / l.$$

zapewniające równowagę węzła A (rys. 10.2b), czyli

$$2N_1 \cos \beta + N_2 - P = 0.$$

Wstawiając wyrażenia (i) w powyższe równanie mamy

$$u_A = Pl / (2E_1 A_1 \cos^3 \beta + E_2 A_2),$$

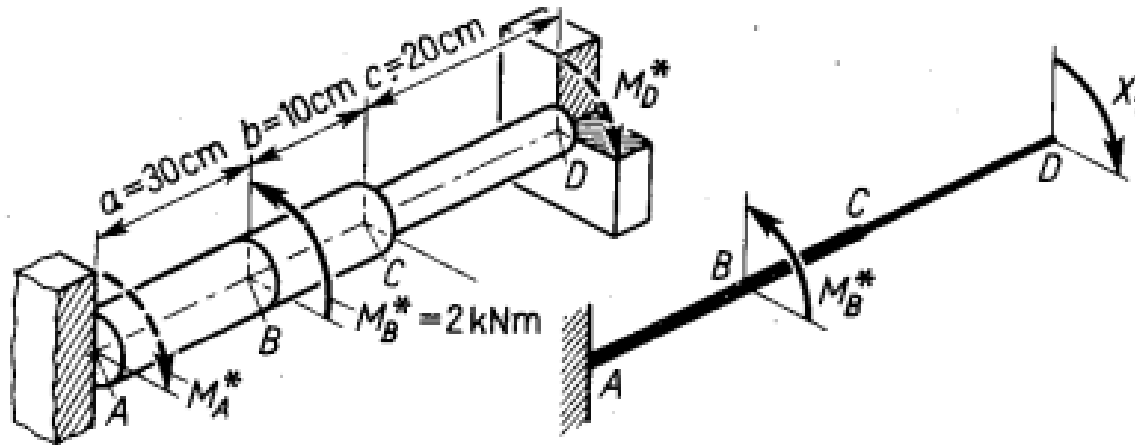
Przykłady zadań

4. Obliczyć naprężenia τ_{\max} w wałku (rys. 10.5) utwierdzonym na końcach, a obciążonym momentem M_B^* . Średnice na odcinkach AC i CD są $d_{AC} = 5 \text{ cm}$ i $d_{CD} = 4 \text{ cm}$.

Odp. Po myślowym rozcięciu utwierdzenia D i oznaczeniu $M_D^* = X_1$ mamy znowu warunek ciągłości (10.1), w którym

$$\alpha_{1,1} = [32(a+b)/\pi G d_{AC}^4] + (32c/\pi G d_{CD}^4), \quad \alpha_{1,0} = -32M_B^* a / \pi G d_{AC}^4$$

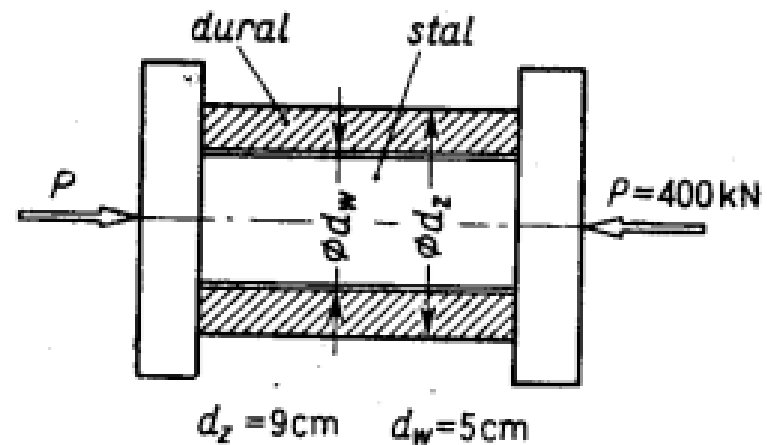
kąty obrotu przekroju D wywołane przez $X_1 = 1 \text{ Nm}$, lub przez M_B^* . W wyniku $X_1 = 675 \text{ Nm}$ i niebezpieczne są przekroje odcinka AB , gdzie $M_s = M_B^* - X_1 = 1325 \text{ Nm}$, zaś $\tau_{\max} = 54,1 \text{ MPa}$.



Rys. 10.5.

Przykłady zadań

2. Stalowy walec i współosiowa z nim duralowa tuleja ściskane są siłą P między nieodkształcalnymi płytami prasy (rys. 10.4). Metodą przemieszczeń określić względne skrócenie ε oraz naprężenia w tulei i walcu. $E_s = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $E_d = 7,0 \cdot 10^4$ MPa.



Rys. 10.4.

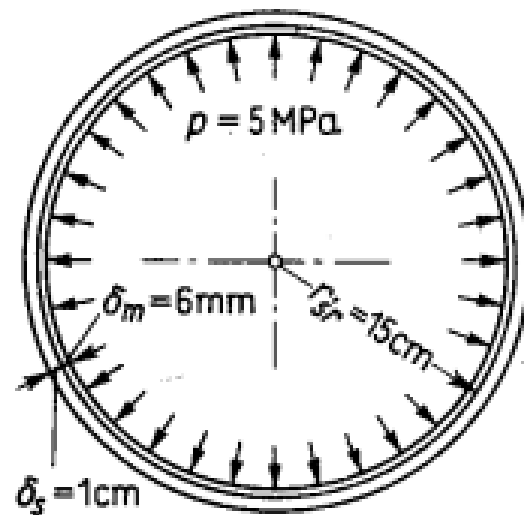
Odp. Ponieważ $\varepsilon_s = \varepsilon_d = \varepsilon$, zatem $N_{\text{stal}} = E_s \varepsilon (\pi d_w^2/4)$, $N_{\text{dural}} = E_d \varepsilon \pi (d_z^2 - d_w^2)/4$, a równanie równowagi płyty $N_{\text{stal}} + N_{\text{dural}} - P = 0$, skąd $\varepsilon = P/[(EA)_s + (EA)_d] = 0,563 \cdot 10^{-3}$ i dalej $\sigma_s = E_s \varepsilon = 115$ MPa, $\sigma_d = E_d \varepsilon \approx 39$ MPa.

Przykłady zadań

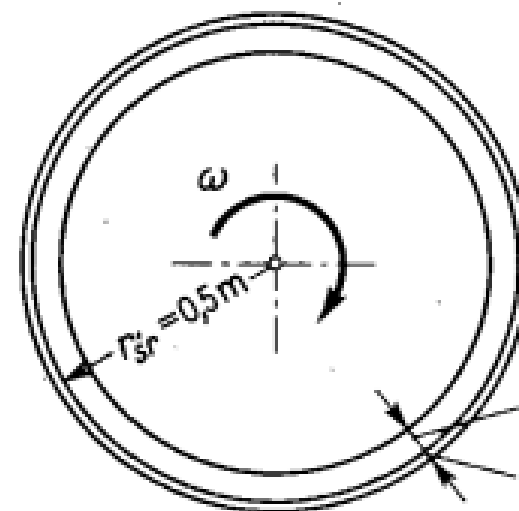
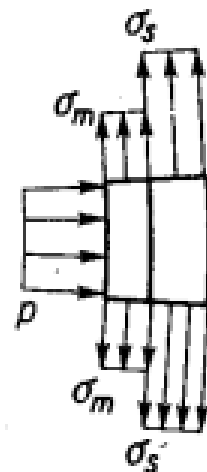
6. Dwie rury: wewnętrzna miedziana ($E_m = 1 \cdot 10^5$ MPa) i zewnętrzna stalowa ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej długości włożono na siebie bez luzu (rys. 10.7). Pomijając tarcie między rurami określić metodą przemieszczeń naprężenia w rurach wywołane działaniem ciśnienia $p = 5$ MPa.

Odp. W obydwoch rurach wydłużenie obwodowe ε jest to samo, skąd $\sigma_s = E_s \varepsilon$ i $\sigma_m = E_m \varepsilon$. Warunek równowagi paska o jednostkowej długości $\sigma_s \delta_s + \sigma_m \delta_m = p r_{tr}$, skąd

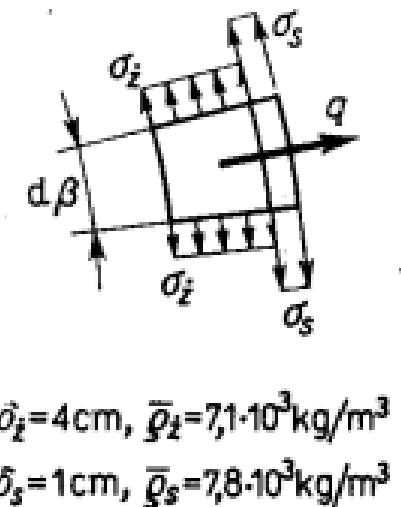
$$\varepsilon = p r_{tr} / (E_s \delta_s + E_m \delta_m) = 2,88 \cdot 10^{-4} \quad \text{oraz} \quad \sigma_s \approx 58 \text{ MPa}, \quad \sigma_m \approx 29 \text{ MPa}.$$



Rys. 10.7.



Rys. 10.8.



7. Cienki pierścień żeliwny ($E_z = 7 \cdot 10^4$ MPa) z nałożonym na niego bez luzu bandażem stalowym ($E_s = 2,0 \cdot 10^5$ MPa) o tej samej szerokości wiruje z $\bar{n} = 1500$ obr/min (rys. 10.8). Określić naprężenia σ_z w pierścieniu i σ_s w bandażu.

Odp. Rolę p z zadania poprzedniego spełnia teraz siła bezwładności $q = (\bar{\rho}_z \delta_z + \bar{\rho}_s \delta_s) (\pi \bar{n} / 30)^2 r_{tr}$. Reszta jak poprzednio i $\sigma_z = 32,5$ MPa, $\sigma_s = 93,0$ MPa.